



Leseprobe

Aeneas Rooch

Die Entdeckung der Unendlichkeit

Das Jahrhundert, in dem die Mathematik sich neu erfand.
1870-1970

Bestellen Sie mit einem Klick für 22,00 €



Seiten: 416

Erscheinungstermin: 08. März 2022

Mehr Informationen zum Buch gibt es auf

www.penguinrandomhouse.de

Inhalte

- Buch lesen
- Mehr zum Autor

Zum Buch

Was ist die Unendlichkeit? Gibt es verschiedene Unendlichkeiten? Vielleicht sogar in unterschiedlichen Größen? Wächst die Unendlichkeit immer weiter und ist niemals abgeschlossen? Oder gibt es auch eine Unendlichkeit, die nicht mehr größer wird?

Diese Fragen haben enorme praktische Bedeutung: Erst durch sie konnte geklärt werden, was Zahlen wie 7 oder Pi genau sind und dass elementare Rechentechniken, etwa zum Bestimmen eines Flächeninhalts oder der Steigung einer Kurve, tatsächlich präzise und ohne böse Überraschungen funktionieren. Letztlich beruht die gesamte heutige Mathematik darauf.

In den Jahren 1870 bis 1970 machten es sich fünf geniale Köpfe zur Aufgabe, das Udenkbare zu ergründen und die Grenzen der Mathematik zu sprengen. Als Erster wagte es Georg Cantor die Unendlichkeit mathematisch zu untersuchen – er revolutionierte dabei die gesamte Mathematik. Was er herausfand, beschäftigte Wissenschaftler bis in die 1960er Jahre: Unter ihnen Bertrand Russell, der einen folgenschweren Widerspruch in Cantors Mengenlehre entdeckte, David Hilbert, der mit einer Auflistung der bedeutendsten mathematischen Fragen seiner Zeit weltberühmt wurde, Kurt Gödel, der die Grenzen unseres Wissens auslotete, und Paul Cohen, der endlich die Antwort auf eine Frage fand, die die Wissenschaft seit fast einem Jahrhundert umtrieb. Sie alle verbindet ihre Faszination für die Unendlichkeit, ihre Leidenschaft für abstraktes Denken, ihre Vorstellungskraft – und ihr Verdienst für die moderne Mathematik, die auf ihren Erkenntnissen fußt.

Aeneas Roochs spannend erzählte Entdeckungsreise in die Welt der Unendlichkeit ist nicht nur eine anregende Erkundung eines der größten Rätsel von Mathematik und Philosophie, sondern zugleich eine Liebeserklärung an die präziseste und logisch strengste Wissenschaft, die wir kennen.

AENEAS ROOCH
Die Entdeckung der Unendlichkeit

AENEAS ROOCH

Die Entdeckung der Unendlichkeit

Das Jahrhundert, in dem
die Mathematik sich neu erfand

1870–1970

HEYNE <

Sollte diese Publikation Links auf Webseiten Dritter enthalten,
so übernehmen wir für deren Inhalte keine Haftung,
da wir uns diese nicht zu eigen machen, sondern lediglich
auf deren Stand zum Zeitpunkt der Erstveröffentlichung verweisen.



Penguin Random House Verlagsgruppe FSC® N001967

2. Auflage
Originalausgabe 2022

Copyright © 2022 by Wilhelm Heyne Verlag, München,
in der Penguin Random House Verlagsgruppe GmbH,
Neumarkter Straße 28, 81673 München

Redaktion: Kerstin Lücker

Illustrationen: Inka Hagen

Bildredaktion: Tanja Zielezniak

Umschlaggestaltung: Hauptmann & Kompanie Werbeagentur, Zürich,
unter Verwendung einer Illustration von © Bridgeman Images /Leonard de Selva
Satz: Satzwerk Huber, Germering

Druck und Bindung: GGP Media GmbH, Pößneck

Printed in Germany

ISBN: 978-3-453-21818-5

www.heyne.de

Für Mari

Inhalt

I

CANTOR ZERLEGT DIE UNENDLICHKEIT 1870–1900

1	Eine merkwürdige Erkenntnis	11
2	Geschaffen, um im Denken Genuss zu finden	13
3	Georg Cantor wagt das Udenkbare	20
4	Rechenregeln außer Betrieb	26
5	Ein genialer Trick	40
6	Mehr als unendlich	55
7	Liebe und Intensität	78
8	Zahlen jenseits aller Vernunft	82
9	Ich sehe es, aber ich glaube es nicht	94
10	Bitterer Kampf um Anerkennung	104
11	Das Universum der Unendlichkeiten	113
12	Das Unheimliche und die Schrecken	133

II

HILBERT SIEHT DAS GEBÄUDE DER MATHEMATIK EINSTÜRZEN UND BAUT ES NEU AUF 1900–1930

13	Die berühmteste Problemliste der Mathematik	141
14	Das dunkle Geheimnis der Unendlichkeit	148
15	Brisante Fragen	156
16	Das ist nicht Mathematik, das ist Theologie	167
17	Die Mengenlehre am Abgrund	188
18	Inkonsistente Vielheiten	194

19	Fataler Leichtsinn	200
20	Was die Zahlen wirklich sind	207
21	Die Konstruktion des Kontinuums	217
22	Angst vor dem Einsturz	226
23	Physik ist für die Physiker viel zu schwer	228
24	Dies ist eine Fakultät und keine Badeanstalt	242
25	Die Welt der Wahrheit	249
26	Die Grundlagenkrise der Mathematik	257
27	Hilberts Hotel	267
28	Gekrümmte Welten	280
29	Zuversicht	296
30	Ganz und gar Gewissheit	299
31	Die fundamentalen Wahrheiten	317

III
SCHMERZHAFTE ERKENNTNISSE UND
EINE UNERWARTETE ANTWORT AUF
EINE HUNDERT JAHRE ALTE FRAGE
1930–1970

32	Der Traum platzt	327
33	Ein Genie ersten Ranges	330
34	Die Mathematik zerbricht an einem Lügner	336
35	Ein sanfter Mann	353
36	Scheitern und Hoffnung	358
37	Die unzugängliche Unendlichkeit	363
38	Die Welt am Abgrund	366
39	Die Spaziergänger von Princeton	373
40	Unendlichkeit unter Zwang	384
41	Ende in Einsamkeit	395
42	Das Jahrhundert der Unendlichkeit	399
	Danksagung	409
	Quellen	411
	Bildnachweis	415

I

**CANTOR ZERLEGT
DIE UNENDLICHKEIT
1870–1900**

die alles übersteigt und jede Vorstellung sprengt – es gibt nicht die eine Unendlichkeit, sondern mehrere. Cantor stellte fest, dass es verschiedene Sorten von Unendlichkeit gibt, und mehr noch, dass man sogar mit ihnen rechnen kann.

Als der Mathematikprofessor im Sommer des Jahres 1917 in die Klinik in Halle eingeliefert wurde, war er den Ärzten wohlbekannt, denn es handelte sich nicht um seinen ersten Aufenthalt dort. Immer wieder hatten ihn Nervenzusammenbrüche aus seinen Gedanken gerissen, und er musste ganze Monate in der Psychiatrie verbringen. Doch ein ums andere Mal kehrte er an den Schreibtisch zurück, dachte sich tief in die logische Welt der Mathematik hinein und kam so der wundersamen Natur der Unendlichkeit auf die Spur. Hier, im Universum der Unendlichkeiten, stieß aber auch er dann auf Rätsel, die er trotz seiner Scharfsinnigkeit nicht lösen konnte. Vor allem eine Frage stellte sich ihm, die zunächst klein und unscheinbar schien. Es dauerte jedoch rund einhundert Jahre, bis sie geklärt werden konnte. Erst 1963 fand der amerikanische Mathematiker Paul Joseph Cohen eine Antwort – und sie war ausnehmend kurios. Mit Georg Cantor aber fing diese erstaunliche Geschichte an.

1856 zogen die Cantors in die deutsche Kurstadt Wiesbaden und von dort weiter nach Frankfurt am Main. Der kleine Georg war zu dieser Zeit elf Jahre alt. Später erinnerte er sich gern an seine Kindheit in Russland, sprach in einem Brief von einer wundervollen Zeit, nannte Sankt Petersburg seine Heimat und bedauerte, dass er sie nie wieder besucht hatte.

Als erfolgreicher Kaufmann wünschte der Vater sich für den Sohn einen nützlichen, gut bezahlten und angesehenen Beruf. Er wollte, dass Georg Ingenieur wurde, und schickte ihn auf die »Höhere Gewerbeschule des Großherzogthums Hessen« nach Darmstadt. Was er dort von ihm erwartete, offenbarte er dem Teenager zu Pfingsten 1860 in einem Brief:

Zur Erlangung vielfacher gründlicher wissenschaftlicher und praktischer Kenntnisse, zur vollkommenen Aneignung fremder Sprachen und Literaturen, zur vielseitigen Bildung des Geistes, auch in manchen humanistischen Wissenschaften [...] dazu ist die eben angetretene zweite Periode Deines Lebenslaufes, das Jünglingsalter, bestimmt. Was der Mensch aber in dieser Periode versäumt, oder durch vorzeitige Vergeudung seiner besten Kräfte, Gesundheit und Zeit, sozusagen verludert, das ist unwiederbringlich und unersetzlich für ewig verloren.¹

Dem erfolgreichen Kaufmann mit der geheimnisvollen Vergangenheit war die Erziehung seiner Kinder wichtig. Ob er ihnen liebevoll Möglichkeiten aufzeigte oder sie mit seinen strengen Vorstellungen einengte, ist im Rückblick schwer zu beurteilen, jedenfalls versuchte Georg Woldemar wohl Zeit seines Lebens, seinem Sohn Georg ein guter Ratgeber zu sein. Wie auch viele heutige Eltern rang er darum, den richtigen Ton zu treffen, um seinen Sohn zu erreichen. Sein Hinweis zu Pfingsten etwa, wozu das Jünglingsalter bestimmt sei und dass man Gesundheit und Zeit nicht vergeuden solle, schien vielleicht zu vorsichtig formuliert gewesen zu sein, jedenfalls beobachtete Georg Woldemar mit wachsender Sorge, dass der junge Georg an der Gewerbeschule in Darmstadt bereits in eine studentische Verbindung eingetreten war, und er sah sich offensichtlich genötigt, deutlicher zu werden. Im Mai 1861 schrieb er ihm:

Möchtest Du doch jetzt soviel eigene Einsicht gewinnen, um selbst die lebhafteste Überzeugung daraus zu schöpfen, welche ungeheuren Nachteile Dir das frühzeitige Sichgehenlassen in diesem lässigen Treiben jenes lächerlichen, äffischen Corpswesens bringen muß, umso mehr als letzteres doch bloß im leeren Kneipen seinen Ausdruck sucht [...]²

Entweder haben die direkten Worte Gehör gefunden, oder das rituelle Trinkgelage in der Studentenverbindung, das Kneipen, war ohnehin nicht Cantors Sache, jedenfalls schrieb ihm sein Vater bereits zwei Monate später voller Freude:

Du scheinst nun selbst zu dem Bewußtsein des Bedürfnisses gekommen zu sein, wie außerordentlich notwendig Dir noch eine allgemeine Ausbildung in den humanoria ist, jenen Fächern der höheren menschlichen Bildung. Ich gratuliere Dir daher zu Deinem tüchtigen Entschlusse, aus dem Corps auszutreten von ganzer Seele und freue mich umso mehr darüber, gerade weil ich es vollkommen begreife, wie schwer in Deinem Alter ein solcher männlicher freiwilliger Entschluß Dir werden mußte! Und ich habe doppelte Ursache mich darüber zu freuen, weil Dein Entschluß nicht durch ein von mir ausgehendes Verbot oder einen Befehl hervorgehoben ist [...] In der Tat: es widerstrebt mir zu sehr, in solchen Sachen etwas zu verbieten, was nur vom eigenen Urteil und Willen eines jungen Menschen abhängen sollte. In reiferen Jahren wirst Du auf diese männliche Überwindung mit wahrer Genugtuung und Freude zurückblicken!³

In seiner Zeit in Darmstadt entdeckte der Teenager Georg nicht nur das Studentenleben, sondern fand auch Freude an abstrakten, mathematischen Überlegungen. Er fasste den Entschluss, Mathematik zu studieren, und sein Vater erlaubte es ihm. Die Einwilligung war eine gute Entscheidung, nicht nur aus der heutigen Perspektive, aus der wir wissen, dass Georg Cantor ein herausragender Mathematiker werden und das Fach mit seinen Gedanken über Mengen und Unendlichkeiten revolutionieren würde, sondern auch aus dem Blickwinkel des Vaters. Mit seiner Zustimmung zur Studienwahl hatte er den jungen Georg glücklich gemacht, wie dieser ihm in einem Brief versicherte:

Wie sehr Dein Brief mich freute, kannst Du Dir denken; er bestimmt meine Zukunft. Die letzten Tage vergingen mir im Zweifel und der Unentschiedenheit; ich konnte zu keinem Entschluß kommen. Pflicht und Neigung bewegten sich in stetem Kampfe. Jetzt bin ich glücklich.⁴

Cantor zog nach Zürich und begann, Mathematik zu studieren. In London hatte der Physiker James Clerk Maxwell gerade das erste Farbfoto der Welt vorgeführt, das, wenn auch blaustichig, ein buntes, schottisches Karomuster zeigte. Seine Erfindung leitete das Zeitalter der Bilder ein. Längst hatte die Industrialisierung der Welt ein neues Gesicht verpasst, und das Leben der Menschen veränderte sich radikal. Neue Eisenbahnstrecken ließen Europa näher zusammenrücken, und die Städte wuchsen rasant, weil immer mehr Arbeiter zu den entstehenden Fabriken zogen. Die moderne Technik, das wurde allmählich deutlich, schuf nicht nur neue Lebensverhältnisse, sondern erwies sich auch als eine Kraft, die Veränderungen immer schneller vorantrieb. Cantor aber folgte unbeirrt seiner Berufung und versank in Zürich in eine abstrakte Welt aus Zahlen, Funktionen und Symbolen. Sein Vater stand ihm, wenngleich kein Ingenieur mehr aus ihm werden würde, weiter mit Ratschlägen zur Seite und zeigte hier, auf dem ihm eher unbekanntem Terrain der Naturwissenschaften, eine verblüffend zutreffende Einschätzung der Situation:

Hast du schon ein System und strenge Einteilung Deiner verschiedenen Tagesbeschäftigungen eingerichtet? Dieses ist für einen künftigen Gelehrten, wie mir dünkt – nein ich weiß es! daß es so ist – eigentlich unerlässlich [...] Ich habe mich aufrichtig gefreut zu sehen, Du habest ein Colleg über Astronomie belegt. Dies ist jedenfalls ein Fach, welches Du nebenbei pflegen musst und welches man bei näherer Bekanntschaft immer mehr und mehr lieb gewinnt. Besonders scheint mir ein Physiker und Mathematiker, der nicht auch Astronomie kultiviert, etwas Undenkbbares!⁵

In der Tat waren Physik, Astronomie und Mathematik schon damals eng miteinander verwoben. Viele mathematische Fragen ergaben sich seit jeher aus dem Versuch, physikalische Beobachtungen zu beschreiben und die Mechanismen zu verstehen, die sie hervorbrachten. So

